

Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen.

Von G. FODOR in Szeged.

Sei A eine Ordnungszahl von zweiter Art, die nicht mit ω konfinal ist und M eine Teilmenge der Menge $W(A)$ aller ξ , für die $\xi < A$ gilt. Auf M sei eine transfinite Funktion $f(\alpha) < \alpha$ mit $\alpha \geq 1$ (und $f(0) = 0$ im Fall, daß $0 \in M$) definiert. Wir nehmen an, daß M stationär ist. Im vorliegenden Artikel wollen wir uns mit dem folgenden Problem befassen.

Problem. *Gibt es immer eine Ordnungszahl $\beta < A$ und eine stationäre Teilmenge N von M , so daß $f(\alpha) \leq \beta$ für alle $\alpha \in N$ ist?*

Wir werden zeigen, daß die Lösung dieses Problems positiv ist.

Bei den Bedingungen dieses Problems gilt der folgende Satz:

a) *Es gibt eine Ordnungszahl $\beta < A$ und eine Menge der Ordnungszahlen $\alpha_\xi \in M$, die mit M zusammengehört, so daß $f(\alpha_\xi) \leq \beta$ für alle α_ξ ist (G. FODOR [7]).*

Dieser Satz wurde vor der genannten Arbeit des Verfassers in den folgenden speziellen Fällen bewiesen:

1. $A = \omega_1$ und $M = W(\omega_1)$ (ALEXANDROFF und URYSOHN [1]),
2. $A = \omega_{\nu+1}$ und $M = W(\omega_{\nu+1})$ (BEN DUSHNIK [2]),
3. $M = W(A)$ (P. ERDÖS [3]),
4. $A = \omega_1$ und M eine abgeschlossene Teilmenge von $W(\omega_1)$ (J. NOVÁK [4]),
5. A eine reguläre Limeszahl (W. NEUMER [5]),
6. M eine mit $W(A)$ ähnliche abgeschlossene Teilmenge von $W(A)$ (H. BACHMANN [6]).

Ferner gilt der Satz:

b) *Wenn M nicht stationär ist, so läßt sich auf M eine regressiv Funktion φ definieren, so daß für jedes $\beta < A$ die Menge der $\alpha \in M$, für die $\varphi(\alpha) \leq \beta$ gilt, nicht-zusammengehört mit $W(A)$ ist (vgl. [6] § 9, Satz 2).*

Wir brauchen folgende Definitionen und Bezeichnungen (vgl. z. B. [6]). Ist A eine Ordnungszahl, so bedeute $W(A)$ die Menge aller Zahlen ξ , für die $\xi < A$ ist. Sind M und N zwei Teilmengen von $W(A)$ ohne Maximum, so heißen M und N *zusammengehört*, wenn es zu jeder Ordnungszahl jeder

der beiden Mengen eine größere Ordnungszahl in der anderen Menge gibt. Sind μ und ν zwei Limeszahlen, so heißt μ *konfinal* mit ν , wenn μ der Limes einer wachsenden Folge vom Typ ν ist. Ist α eine Limeszahl, so bedeute $cf(\alpha)$ den Index γ der kleinsten Ordnungszahl ω_γ , mit der α konfinal ist. Eine Teilmenge M von $W(A)$ heißt in $W(A)$ *abgeschlossen*, wenn sie zu jeder Fundamentalfolge von Zahlen aus ihr auch deren Limes enthält, sofern dieser $< A$ ist. Eine in $W(A)$ abgeschlossene, mit $W(A)$ zusammengehörige Teilmenge von $W(A)$ heißt ein *Band* von $W(A)$. Eine Teilmenge M von $W(A)$ heißt *stationär*, wenn $W(A) - M$ kein Band von $W(A)$ enthält. Eine auf einer Teilmenge M von $W(A)$ definierte Funktion φ heißt *regressiv*, wenn $\varphi(\xi) < \xi$ für alle Argumente $\xi \in M$ mit $\xi \geq 1$ (und $\varphi(0) = 0$ im Fall, daß $0 \in M$).

Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. Sei A eine Limeszahl mit $cf(A) > 0$ (d. h. A ist nicht mit ω konfinal), $\{K_\alpha\}_{\alpha < \tau}$ ($\tau \leq \omega_{cf(A)}$) eine Folge vom Typ $\tau \leq \omega_{cf(A)}$ von nicht-leeren und paarweise disjunkten nicht-stationären Teilmengen von $W(A)$ und x_α das erste Element von K_α ($\alpha < \tau$). Ist die Menge $U = \{x_\alpha\}_{\alpha < \tau}$ nicht-stationär, und im Falle $\tau = \omega_{cf(A)}$ mit $W(A)$ zusammengehörig, so ist die Menge $\bigcup_{\alpha < \tau} K_\alpha$ nicht-stationär.¹⁾

Beweis. Wenn φ eine regressiv Funktion auf $N \subseteq W(A)$ ist, so bezeichnen wir mit H_φ^η die Menge aller Ordnungszahlen μ , für die $\varphi(\mu) \leq \eta$ ist: $H_\varphi^\eta = \{\mu \in N : \varphi(\mu) \leq \eta\}$. Nach b) existiert eine regressiv Funktion ψ auf U und zu jedem $\alpha < \tau$ eine regressiv Funktion φ_α auf $K_\alpha - \{x_\alpha\}$, so daß für jede $\mu < A$ die Menge H_ψ^μ bzw. $H_{\varphi_\alpha}^\mu$ ($\alpha < \tau$) nicht-zusammengehörig mit $W(A)$ ist. Es sei für $\alpha < \tau$

$$g_\alpha(\xi) = \begin{cases} \varphi_\alpha(\xi) & \text{für } \xi \in K_\alpha - H_{\varphi_\alpha}^{\tau_\alpha} - \{x_\alpha\}, \\ x_\alpha & \text{für } \xi \in H_{\varphi_\alpha}^{\tau_\alpha}. \end{cases}$$

Da die Menge $H_{\varphi_\alpha}^{\tau_\alpha}$ ($\alpha < \tau$) nicht-zusammengehörig mit $W(A)$ ist, so ist g_α für jedes $\alpha < \tau$ eine regressiv Funktion auf $K_\alpha - \{x_\alpha\}$ mit $g_\alpha(\xi) \geq x_\alpha$ für $\xi \in K_\alpha - \{x_\alpha\}$. Es sei weiter

$$g(\xi) = \begin{cases} \psi(\xi) & \text{für } \xi \in U, \\ g_\alpha(\xi) & \text{für } \xi \in K_\alpha - \{x_\alpha\} \text{ und } \alpha < \tau. \end{cases}$$

g ist eine regressiv Funktion auf $K = \bigcup_{\alpha < \tau} K_\alpha$, so daß für jedes $\mu < A$ die Menge H_g^μ nicht-zusammengehörig mit $W(A)$ ist. Würde nämlich eine Zahl $\mu_0 < A$ existieren, für die $H_g^{\mu_0}$ mit $W(A)$ zusammengehörig ist, so

¹⁾ Beim Beweis wird eine Modifikation eines Beweises von G. BLOCH benutzt (vgl. [8], S. 266).

könnten die Elemente von $H_q^{\mu_0}$ entweder in U oder in Mengen $K_\alpha - \{x_\alpha\}$ mit $x_\alpha \leq \mu_0$ vorkommen, also gäbe es entweder in der Menge U oder in einer Menge K_{α_0} mit $x_{\alpha_0} \leq \mu_0$ eine mit $W(A)$ zusammengehörige Teilmenge von $H_q^{\mu_0}$, im Widerspruch zur Definition von ψ bzw. g_{α_0} .

Wir beweisen nun den

Satz 1. *Sei A eine Limeszahl mit $cf(A) > 0$ (d. h. A sei nicht mit ω konfinal) und M eine Teilmenge von $W(A)$. Wenn M stationär ist, so existiert zu jeder auf M definierten regressiven Funktion φ eine Ordnungszahl $\alpha < A$ und eine stationäre Teilmenge N von M , so daß $\varphi(\beta) \leq \alpha$ für alle $\beta \in N$ ist.*

Beweis. Wir betrachten ein Band $B = \{\beta_\nu\}_{\nu < \omega_{cf(A)}}$ vom Typ $\omega_{cf(A)}$ in $W(A)$, wobei $\beta_0 = 0$ ist. Wir bezeichnen mit H_ν die Menge aller Ordnungszahlen $\mu \in M$, für die $\beta_\nu \leq \varphi(\mu) < \beta_{\nu+1}$ ist: $H_\nu = \{\mu \in M : \beta_\nu \leq \varphi(\mu) < \beta_{\nu+1}\}$. Offenbar ist $H_\alpha \cap H_\tau = \emptyset$ für $\alpha \neq \tau$. Da B ein Band ist, da also $\lim_{\nu < \lambda} \beta_\nu = \beta_\lambda$ für jede Limeszahl $\lambda < \omega_{cf(A)}$ und $\lim_{\nu < \omega_{cf(A)}} \beta_\nu = A$ ist, so ergibt sich hieraus nach der Definition von H_ν , daß

$$M = \bigcup_{\nu < \omega_{cf(A)}} H_\nu$$

ist. Sei nun $\{H_{\nu_\xi}\}_{\xi < \tau}$ ($\tau \leq \omega_{cf(A)}$) die Folge der nicht-leeren Mengen H_{ν_ξ} und γ_{ν_ξ} sei das erste Element von H_{ν_ξ} für alle $\xi < \tau$. Da φ eine regressiv Funktion ist, so ist $\beta_{\nu_\xi} < \gamma_{\nu_\xi}$. Wir definieren nun auf der Menge $Y = \{\gamma_{\nu_\xi}\}_{\xi < \tau}$ ($\tau \leq \omega_{cf(A)}$) eine regressiv Funktion ψ :

$$\psi(\gamma_{\nu_\xi}) = \beta_{\nu_\xi}.$$

Man sieht sofort, daß $\psi(\alpha) \neq \psi(\beta)$ ist, wenn α und β zwei verschiedene Elemente von Y sind. So ergibt sich hieraus auf Grund von a), daß die Menge Y nicht-stationär ist. Da M stationär ist und

$$\bigcup_{\xi < \tau} H_{\nu_\xi} = M \quad (\tau \leq \omega_{cf(A)})$$

ist, existiert nach dem Hilfssatz ein $\xi_0 < \tau$, für das $H_{\nu_{\xi_0}}$ stationär ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. *Ist A eine reguläre Limeszahl $> \omega$ und M eine stationäre Teilmenge, so existiert für jede auf M definierte regressiv Funktion φ eine stationäre Teilmenge von M von Argumenten, für die die Werte von φ einander gleich sind.*

Beweis. Sei $L_\alpha = \{\mu \in M : \varphi(\mu) = \alpha\}$. Nach Satz 1 existiert eine Zahl $\beta < A$ derart, daß die Menge N der $\gamma \in M$, für die $\varphi(\gamma) \leq \beta$ gilt,

stationär ist. Offenbar ist

$$N = \bigcup_{\alpha \leq \beta} L_\alpha.$$

Da N stationär ist, existiert nach dem Hilfssatz eine Zahl α_0 ($\alpha_0 \leq \beta < \aleph_1$), für die L_{α_0} stationär ist.

Literaturverzeichnis.

- [1] P. S. ALEXANDROFF—P. URYSOHN, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. Akad. Wiss. Amsterdam*, (1) 45, Nr. 1, 1—96.
- [2] BEN DUSHNIK, A note on transfinite ordinals, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 37 (1931), 860—862.
- [3] P. ERDŐS, Some remarks on set theory, *Proceedings Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), 127—141.
- [4] J. NOVÁK, A paradoxical theorem, *Fundamenta Math.*, 37 (1950), 77—83.
- [5] W. NEUMER, Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn, *Math. Zeitschrift*, 54 (1951), 254—261.
- [6] H. BACHMANN, *Transfinite Zahlen* (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 1, Berlin—Heidelberg—Göttingen, 1955), S. 43.
- [7] G. FODOR, Generalization of a theorem of Alexandroff and Urysohn, *Acta Sci. Math.*, 16 (1955), 204—206.
- [8] G. BLOCH, Sur les ensembles stationnaires de nombres ordinaux et les suites distinguées de fonctions regressives, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 236 (1953), 265—267.

(Eingegangen am 24. September 1956.)